E.N.S. ULM-SEVRES

GROUPE C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS

Dans tout le problème m désigne un entier pair strictement positif et

$$\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N};\ n \leqslant m\}.$$

Si t est un réel on pose

$$t_m = \frac{m}{2} + \left[t\sqrt{\frac{m}{2}}\right],$$

où $\left[t\sqrt{\frac{m}{2}}\right]$ est l'unique entier relatif tel que

$$t\sqrt{\frac{m}{2}} - 1 < \left[t\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \leqslant t\sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Lorsque n est dans $\mathbb{N}_m$ on note $\gamma(n, m)$ le maximum de la fonction $f_{n,m}(x) = (1+x)^{m-n}(1-x)^n$ sur $[-1, 1]$. Autrement dit

$$\gamma(n, m) = \text{Max}\,\{(1+x)^{m-n}(1-x)^n;\ x \in [-1, 1]\}.$$

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème seront définies sur un même espace de probabilité (Ω, A, P).

PREMIÈRE QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit k un élément non nul de $\mathbb{N}_m$. On considère m variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_m$ indépendantes et de même loi vérifiant

$$P(Y_1 = 1) = \frac{k}{m},\ P(Y_1 = 0) = 1 - \frac{k}{m}$$

et on pose

$$T = \sum_{i=1}^{m} Y_i.$$

a. Montrer que

$$P(|T - E(T)| > 2\sqrt{k}) \leqslant \frac{1}{4}.$$

b. En déterminant l'entier n pour lequel $P(T = n)$ est maximal, en déduire que

$$P(T = k) \geqslant (10\sqrt{k})^{-1}.$$

DEUXIÈME QUESTION PRÉLIMINAIRE

a. Montrer que pour tout réel $x > -1$

$$\text{Log}(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

b. Vérifier que pour tout réel t fixé et m assez grand

$$\text{Log}\left((1+x)^{m-t_m}(1-x)^{t_m}\right) \leqslant 2 + 2|tx|\sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{1}{4}mx^2$$

si $-1 < x < 1$.

c. Montrer que pour tout réel t il existe un réel $K(t)$ ne dépendant que de t, tel que, si $t_m \in \mathbb{N}_m$

$$\gamma(t_m, m) \leqslant K(t).$$

Tournez la page S. V. P.

ENS Ulm-Sèvres
Groupe C.Mathematiques
1986
page 35

I

Dans toute la suite du problème on désignera par $a_m(i,j)$ et $b_m(i,j)$, i et j appartenant à $\mathbb{N}_m$, les deux familles de réels vérifiant, pour tout réel x,

$$\sum_{j=0}^{m} a_m(i,j)\, x^j = (1-x)^i\,(1+x)^{m-i}$$

$$\sum_{j=0}^{m} 2m\, b_m(i,j)\, x^j = (x^{i-1}+x^i)\,(i+x(m-i)).$$

a. Montrer que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} C_m^i\, a_m(i,j)\, u^i v^j = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} C_m^j\, a_m(j,i)\, u^i v^j.$$

En déduire que $C_m^i\, a_m(i,j) = C_m^j\, a_m(j,i)$.

b. Soit A la matrice carrée d'ordre $m+1$ dont les coefficients vérifient, pour i, j dans $\mathbb{N}_m$

$$A_{i+1,\,j+1} = a_m(i,j)$$

Montrer que $2^{-m}A^2$ est la matrice identité d'ordre $m+1$.

II

Considérons deux urnes U_1 et U_2. Pour tout entier positif n, notons $X_n^{(m)}$ le nombre aléatoire de boules contenues dans l'urne U_1 à l'instant n, obtenu de la façon suivante :

À l'instant initial ($n = 0$) chaque urne contient $\frac{m}{2}$ boules, donc $X_0^{(m)} = \frac{m}{2}$.

À l'instant $n+1$ on tire une des m boules contenues dans la réunion des deux urnes de façon équiprobable (donc, sachant que $X_n^{(m)} = i$, la boule est choisie dans U_1 avec probabilité $\frac{i}{m}$, dans U_2 avec probabilité $\frac{m-i}{m}$). Puis, indépendamment de ce qui précède, on met cette boule dans U_1, ou dans U_2, avec probabilité $\frac{1}{2}$. Le nombre de boules dans U_1 après cette double opération est $X_{n+1}^{(m)}$.

a. Montrer que pour tout entier $n > 0$

$$P\left(X_{n+1}^{(m)} = j \,\middle/\, X_n^{(m)} = i\right) = b_m(i,j), \quad i, j \in \mathbb{N}_m.$$

b. Soit B la matrice carrée d'ordre $m+1$ dont les coefficients vérifient, pour i, j dans $\mathbb{N}_m$,

$$B_{i+1,\,j+1} = b_m(i,j).$$

Exprimer, pour tout entier k, $P(X_n^{(m)} = k)$ en fonction des coefficients de la matrice B^n.

c. Montrer que, pour tout réel x,

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_m(i,j)\, b_m(j,k)\, x^k = (1-x)^i\,(1+x)^{m-i}\left(1-\frac{i}{m}\right).$$

d. Calculer la matrice ABA^{-1}.

e. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}_m$

$$P(X_n^{(m)} = k) = \frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m} a_m\left(\frac{m}{2}, j\right) a_m(j,k)\left(1-\frac{j}{m}\right)^n.$$

f. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var} X_n^{(m)}.$$

III

a. Déterminer, pour tout entier relatif k, une primitive de la fonction $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_k(x) = \operatorname{Re}(e^{ikx})$$

(si $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z).

b. En déduire que, pour tout $r > 0$ et j, k dans $\mathbb{N}_m$,

$$a_m(j,k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{(1+re^{ix})^{m-j}\,(1-re^{ix})^j}{r^k\, e^{ikx}}\right\} dx.$$

Tournez la page S. V. P.

page 36 1986 ENS Ulm-Sevres Groupe C.Mathematiques

c. Vérifier que pour tout complexe z

$$|(1+z)^{m-j}(1-z)^j|^2 = (1+|z|^2)^m (1+u(z))^{m-j}(1-u(z))^j$$

où $\quad u(z) = 2(1+|z|^2)^{-1}\mathrm{Re}(z)$.

d. En déduire que pour tout $r > 0$ et j, k dans $\mathbb{N}_m$

$$|a_m(j,k)|^2 \leqslant \frac{(1+r^2)^m}{r^{2k}}\gamma(j,m).$$

e. Soient j, k deux éléments de $\mathbb{N}_m$. En déterminant le minimum de la fonction $f(x) = \dfrac{(1+x^2)^m}{x^{2k}}$, et en utilisant la première question préliminaire, montrer que

$$|a_m(j,k)|^2 \leqslant 10\ C_m^k\ \gamma(j,m)\sqrt{k}.$$

IV

Dans cette partie, t est un réel fixé. Si t_m et n sont dans $\mathbb{N}_m$ on pose

$$\alpha_m(t,n) = a_m(t_m,n).$$

a. Montrer qu'il existe une suite de réels $\{h_n(t),\ n \geqslant 0\}$ telle que, pour tout réel x,

$$\exp(-2tx-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\,x^n.$$

b. Si $t_m \in \mathbb{N}_m$ on pose

$$g_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_m(t,n)\left(x\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^n.$$

En étudiant la limite, quand m tend vers l'infini, de $g_m(x)$ et de ses dérivées successives $g_m'(x)$, $g_m''(x)$, ..., montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \alpha_{2p}(t,n)\,p^{-\frac{n}{2}} = h_n(t).$$

c. Calculer

$$\lim_{p\to\infty} (C_{2p}^n)^{-\frac{1}{2}}\,\alpha_{2p}(t,n).$$

d. Montrer que, si t_m et n sont dans $\mathbb{N}_m$, alors

$$|\alpha_m(t,n)|^2 \leqslant 10\ K(t)\ C_m^n\sqrt{n}$$

($K(t)$ a été introduit dans la deuxième question préliminaire).

e. En utilisant l'inégalité

$$1+x \leqslant e^x,\quad x \in \mathbb{R},$$

démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $M > 0$ tel que, si $p \geqslant M$ et $n > 0$,

$$\left|\sum_{j=M}^{2p} (C_{2p}^j)^{-1}\ \alpha_{2p}(0,j)\ \alpha_{2p}(t,j)\left(1-\frac{j}{2p}\right)^{2pn}\right| \leqslant \varepsilon.$$

f. Montrer que, pour tout $n > 0$, la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2e^n)^{-j}\,j!\ h_j(0)\ h_j(t)$$

converge. On note $\varphi(t,n)$ sa limite.

g. Montrer que, pour tout entier $n > 0$,

$$\lim_{p\to\infty} \frac{4^p}{C_{2p}^{t_{2p}}} P(X_{2np}^{(2p)} = t_{2p}) = \varphi(t,n).$$

h. En utilisant le fait que, quand n tend vers l'infini, $n!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, calculer

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt{p}\ P(X_{2np}^{(2p)} = t_{2p})$$

en fonction de $\varphi(t,n)$, pour tout entier $n > 0$.

i. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt{p}\ P(X_{2np}^{(2p)} = p) = \{\pi(1-e^{-2n})\}^{-\frac{1}{2}}.$$